Feuille de TD n° 8

Variables aléatoires

20 avril 2022

Exercice 1. Pour X une v.a. discrète de carré intégrable, on appelle v.a. centrée de X la v.a. $Y = X - \mathbb{E}(X)$.
Si $Var(X) \neq 0$, on appelle v.a. réduite de X la v.a. $Z = \frac{X}{Var(X)}$.
Soit $p \in]0,1[$. Soit X une v.a. de Bernouilli de paramètre p. Déterminer X^*, la v.a. centrée réduite de X.

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre a, on a $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathrm{Var}(X) = a(1-a)$.
Donc

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X}} = \frac{X - a}{\sqrt{a(1-a)}}.$$

Lorsque $X = 1$, on a $X^* = \sqrt{\dfrac{1-a}{a}} = \alpha$.
Lorsque $X = 0$, on a $X^* = \sqrt{\dfrac{a}{1-a}} = \dfrac{1}{\alpha}$.
Donc $X^*(\Omega) = \{-1/\alpha, \alpha\}$,
et $\mathbb{P}(X^* = \alpha) = \mathbb{P}(X = 1) = a$ et $\mathbb{P}(X^* = -1/\alpha) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - a$.

Exercice 2. Calculer $\mathbb{P}(X < E(X))$ si X est une variable aléatoire de loi binomiale telle que $\mathbb{E}(X) \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(X) = 2\mathrm{Var}\,(X)$.

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et a, on sait que $\mathbb{E}(X) = na$ et $\mathrm{Var}\,(X) = na(1-a)$.
Donc l'égalité $\mathbb{E}(X) = 2\mathrm{Var}\,(X)$ se traduit par

$$na = 2na(1-a),$$

et donc $a = 1/2$ et $\mathbb{E}(X) = n/2$.
Comme $n/2$ n'est pas un entier, on écrit $n = 2\alpha + 1$.
On a ainsi

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{k=0}^{\alpha} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

En faisant le changement d'indice de sommation $j = n - k$, on a

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{j=n-\alpha}^{n} \frac{\binom{n}{n-j}}{2^n},$$

mais puisque $n - \alpha = \alpha + 1$,

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \sum_{j=n-\alpha}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{2^n} = \mathbb{P}(X > n/2).$$

Puisque $\mathbb{P}(X = n/2)$ est nulle, on a

$$\mathbb{P}(X < n/2) + \mathbb{P}(X > n/2) = 1,$$

et on en déduit

$$\mathbb{P}(X < n/2) = \frac{1}{2}$$

Exercice 3. On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle
   $\mathbb{P}(X = k | Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

---

1. Pour un objet pris à la sortie, $\mathbb{P}(A) = 0.6$ et $\mathbb{P}(B) = 0.4$ Soit D ="l'objet est défectueux". On a $\mathbb{P}(D|A) = 0.1$ et $\mathbb{P}(D|B) = 0.2$ et comme (A, B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\,\mathbb{P}(B) \\
&= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\
&= 0.14.
\end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probababilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" est $\mathbb{P}(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|D) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} \\
&= \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

   (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $n : \mathbb{P}(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$

   (b) Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n, qui sont défectueux **indépendemment** les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.1)$ et $\mathbb{P}(X = k|Y = n) = 0$ si $k > n$ et $P(X = k|Y = n) = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$

   (c) Comme $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

   $$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k|Y = n)\,\mathbb{P}(Y = n)$$

   série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n \geq k$ ou $n < k$:

   $$\begin{aligned}
   \sum_{n=0}^{M} \mathbb{P}(X = k|Y = n)\,\mathbb{P}(Y = n) &= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k|Y = n)\,\mathbb{P}(Y = n) \\
   &\quad + \sum_{n=k}^{M} \mathbb{P}(X = k|Y = n)\,\mathbb{P}(Y = n) \\
   &= 0 + \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\
   &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!\,(n-k)!n!} (0.9 \cdot 20)^n \\
   &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{M} \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\
   &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\
   &\to \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}
   \end{aligned}$$

   donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

Exercice 4.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$

   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ est convergente.
   Montrer que X est d'espérance finie.

   (c) Réciproquement, on suppose que X est d'espérance finie.
   Montrer alors que $\big(n\mathbb{P}(X > n)\big)_n$ tend vers 0, que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ converge, et que

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

2. **Application :** Soient $N, n \geq 1$.
On prend une urne avec N boules identiques au toucher, numérotées de 1 à N.
On fait n tirages de boules avec remise. Tous les tirages sont indépendants les uns des autres.
On note X la v.a. qui donne le plus grand numéro obtenu lors des n tirages.
   (a) Soit $1 \leq k \leq N$. Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$?
   En déduire la loi de probas de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$). Calculer cette limite.
   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N} = \dfrac{n}{n+1}$.
3. Montrer que si X est de carré intégrable, alors

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X > k).$$

---

1. (a) Pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n) + \mathbb{P}(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) - n\mathbb{P}(X>n).\end{aligned}$$

   (b) On a, pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$. La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.
   (c) Si X admet une espérance, la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq n\mathbb{P}(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k).$$

   Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

   (d) i. On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = (\frac{k}{N})^n \implies \mathbb{P}(X > k) = 1 - (\frac{k}{N})^n.$$

   Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

   ii. Par la question précédente : $\mathbb{E}(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n$.
   iii. On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

   iv. On a :

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\frac{k}{N})^n \to 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

   (e) On utilise le même type d'argument :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2(\mathbb{P}(X>k-1) - \mathbb{P}(X>k)) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\mathbb{P}(X>k) - n^2 P(X>n).$$

Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2 P(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq n^2 P(X>n) = n^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 P(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X>k).$$